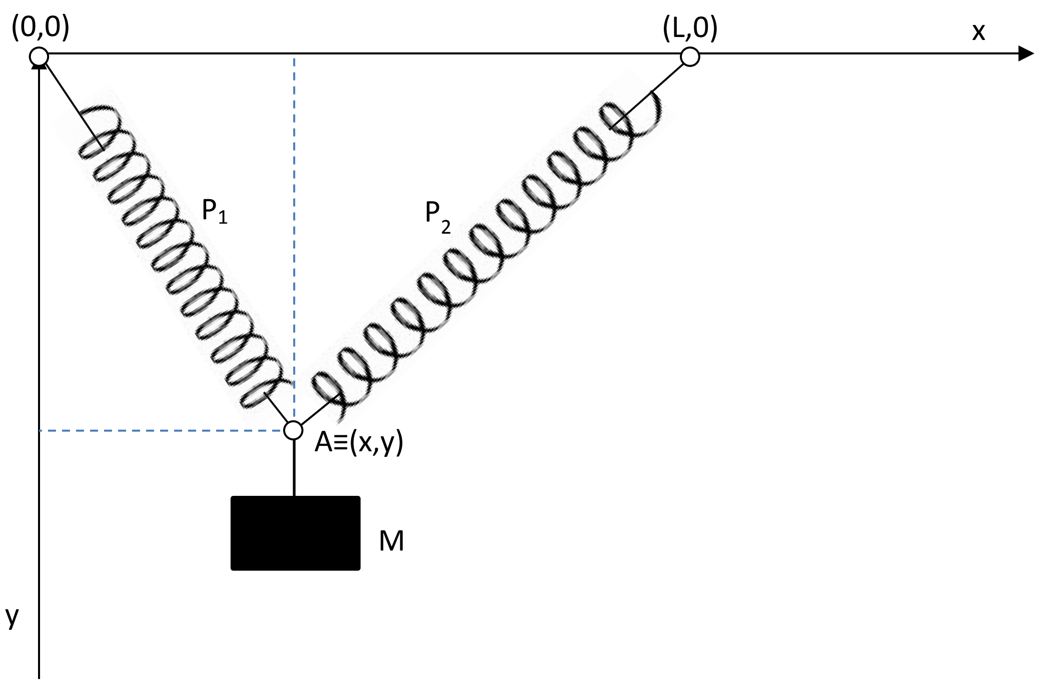
3. Optimalizace pomocí nástroje *Řešitel*

Rovnováha mechanické soustavy

Uvažujme dvě různé nehmotné lineární pružiny P_1 a P_2 připevněné na pevné horizontální tyči splývající s osou *x* podle obrázku:



Na druhém konci jsou pružiny spojeny v bodě *A*, v němž je připevněno závaží o hmotnosti *M*. Naší úlohou je nalézt souřadnice bodu *A* v rovnovážném stavu soustavy, kde je výslednice sil v bodu *A* nulová.

V nástroji MS Excel máme k dispozici modul *Řešitel (Solver)*, který úlohy podobného typu řeší snadno i v případě, kdy neexistuje jejich analytické řešení. Potřebujeme pouze zformulovat vhodné zadání například takto:

Délka pružin v rovnovážném stavu je:

$$l_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(L - x)^2 + y^2}$$

Elastická energie pružin je:

$$E_1 = \frac{1}{2} k_1 (l_{01} - l_1)^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} k_2 (l_{02} - l_2)^2$$

kde k_1 a k_2 jsou tuhosti pružin a l_{01} a l_{02} jsou délky nezatížených pružin.

Potenciální gravitační energii závaží můžeme vzhledem k orientaci osy y uvažovat takto:

$$E_p = Mgy$$

kde M je hmotnost závaží a g je gravitační zrychlení.

Celková energie naší soustavy je tedy:

$$E = E_1 + E_2 + E_p$$

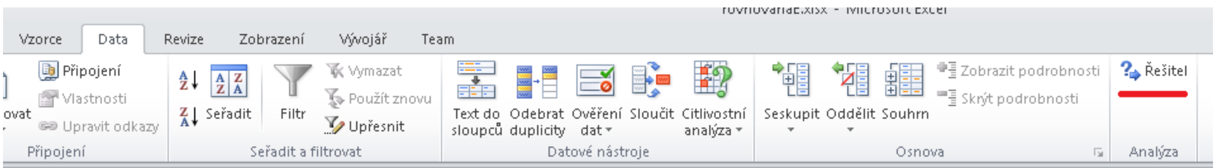
Prostřednictvím vzorců zachycujících uvedených šest rovnic definujeme závislost celkové energie na souřadnicích bodu *A*. Podle základní teorie mechaniky je celková energie soustavy v rovnovážném stavu minimální. Vestavěné optimalizační metody *Řešitele* jsou vhodné právě pro nalezení takové konfigurace parametrů (v tomto případě souřadnic), kdy je některá veličina z našeho hlediska optimální (minimální, maximální, nulová apod.).

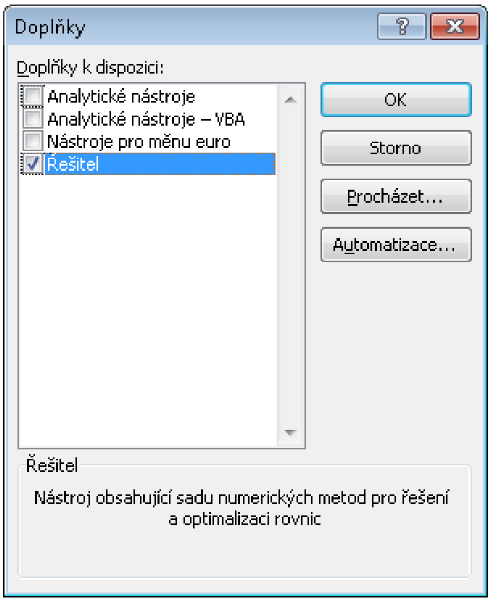
Nejprve vytvoříme list obsahující výše uvedené vzorce např. takto (v obrázku jsou ve sloupci *B* zobrazeny potřebné vzorce, ve skutečnosti jsou v buňkách zobrazeny samozřejmě jejich výsledky):

	A	B	C	D
1	**Veličina**	**Hodnota**	**Jednotky**	**Popis**
2	**x**	**0,5**	m	Variace souřadnic hmotného bodu bude
3	**y**	**-0,5**	m	vstupem pro optimalizaci
4	**Pružina 1**			
5	l_0	1	m	Délka nezatížené pružiny 1
6	k	100	N/m	Tuhost pružiny 1
7	l	=ODMOCNINA(B2*B2+B3*B3)	m	$\sqrt{(x^2+y^2)}$ Skutečná délka pružiny 1
8	**Pružina 2**			
9	l_0	1	m	Délka nezatížené pružiny 2
10	k	200	N/m	Tuhost pružiny 2
11	l	=ODMOCNINA((B14-B2)*(B14-B2)+B3*B3)	m	$\sqrt{((l-x)^2+y^2)}$ Skutečná délka pružiny 2
12	**Další parametry**	0		
13	M	1	kg	Hmotnost závaží
14	L	1	m	Vzdálenost mezi závěsem pružin
15	**Energie**			
16	E_1	=0,5*B6*(B7-B5)*(B7-B5)	J	$0{,}5.k.(l-l_0)^2$ Elastická energie pružiny 1
17	E_2	=0,5*B10*(B11-B9)*(B11-B9)	J	$0{,}5.k.(l-l_0)^2$ Elastická energie pružiny 2
18	E_p	=B13*9,81*B3	J	m.g.y Potenciální energie závaží
19	E	**=B16+B17+B18**	J	$E_1+E_2+E_p$. Hledáme min. celkové energie
20				

Výchozí nerovnovážné hodnoty souřadnic zvolíme libovolně.

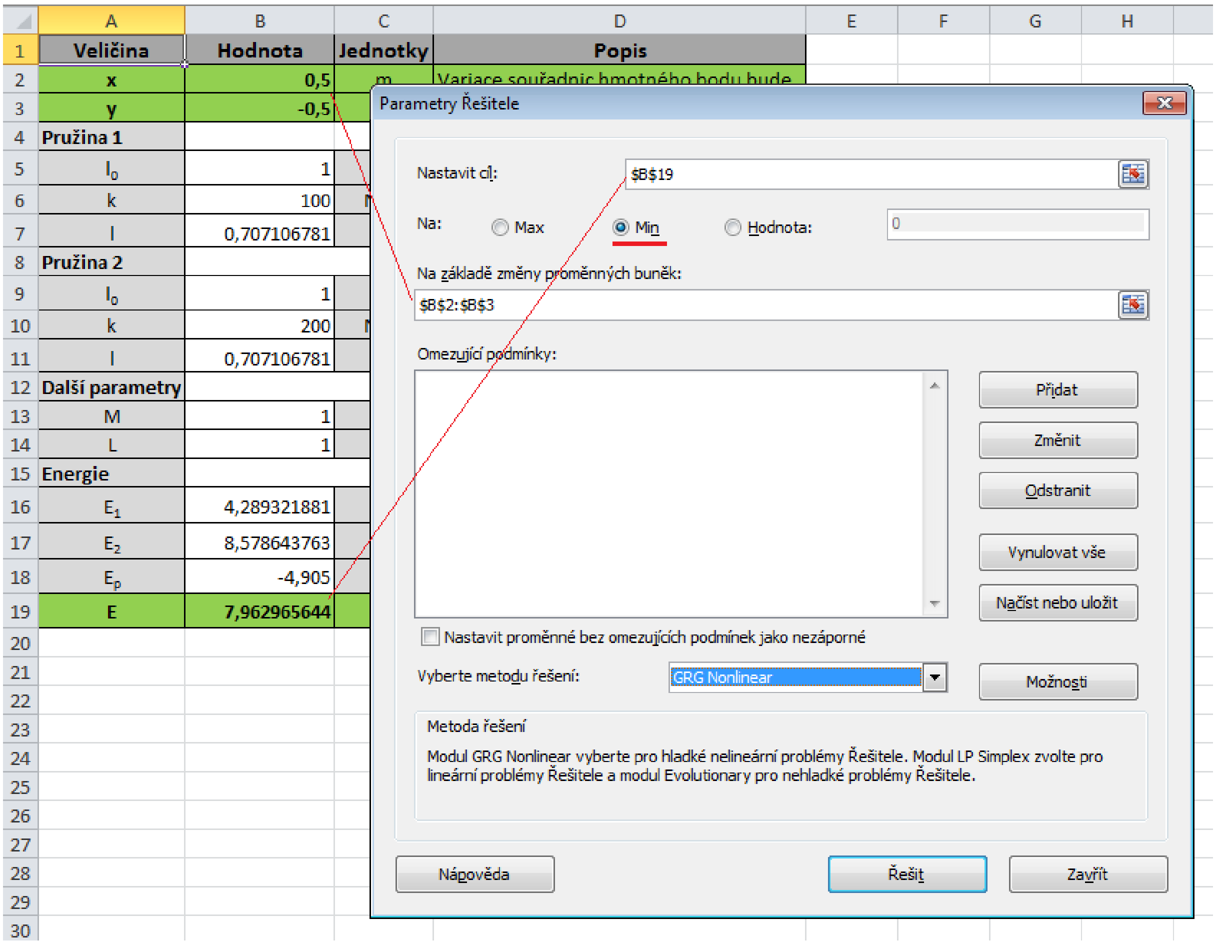
Nyní vyvoláme formulář *Řešitele* pomocí ikony v záložce *Data*:





Poznámka: pozor, řešitel je tvořen doplňkem nástroje MS Excel a musí se v případě potřeby nainstalovat z nabídky *Soubor – Možnosti – Doplňky*:

Formulář řešitele můžeme vyplnit např. takto:

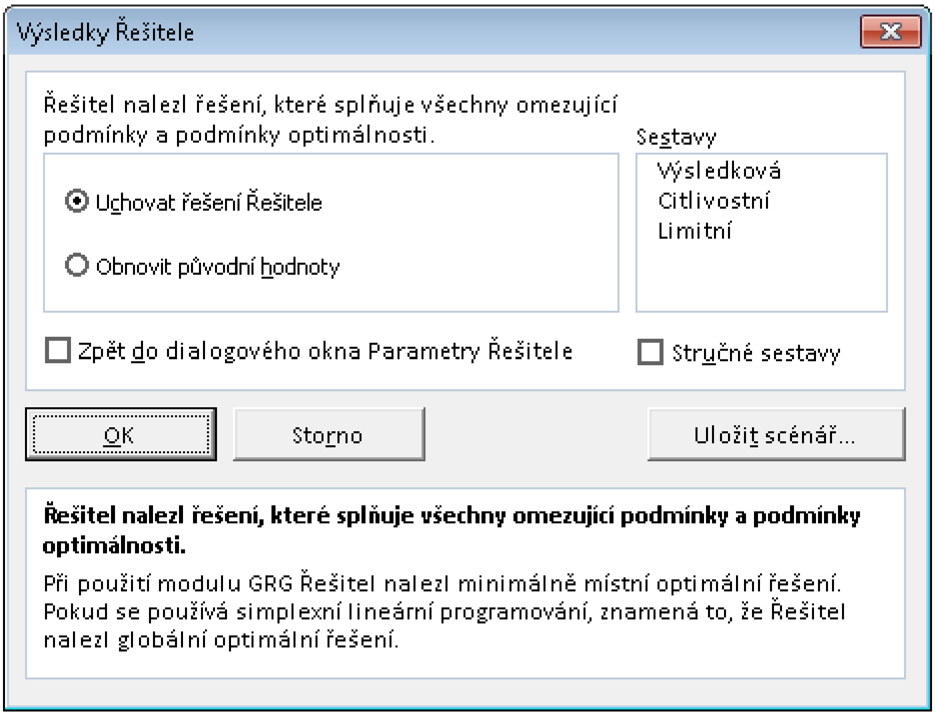


Položka nazývaná ve formuláři jako *Cíl* odpovídá buňce, jejíž hodnotu chceme optimalizovat (v tomto případě hledáme minimum – jak je vidět z obrázku, lze požadovat také maximum nebo dosažení hodnoty co nejbližší zadanému číslu). Je zřejmé, že *Cíl* musí být tvořen vzorcem.

Položka formuláře „Na základě změny proměnných“ je samovysvětlující – definuje buňky, které bude *Řešitel* měnit tak dlouho, dokud nedosáhne požadovaného optima v cílové buňce. Pochopitelně by tyto měněné buňky měly obsahovat hodnotu a nikoli vzorec.

V našem případě je třeba zvolit ještě optimalizační metodu – pro obecnou úlohu, kde nechceme zkoumat, jak závisí *Cíl* na měněných proměnných, vybereme obecnou nelineární metodu „GRG nonlinear“ (v našem případě nás nezajímá, jak *Řešitel* dospěje k výsledku).

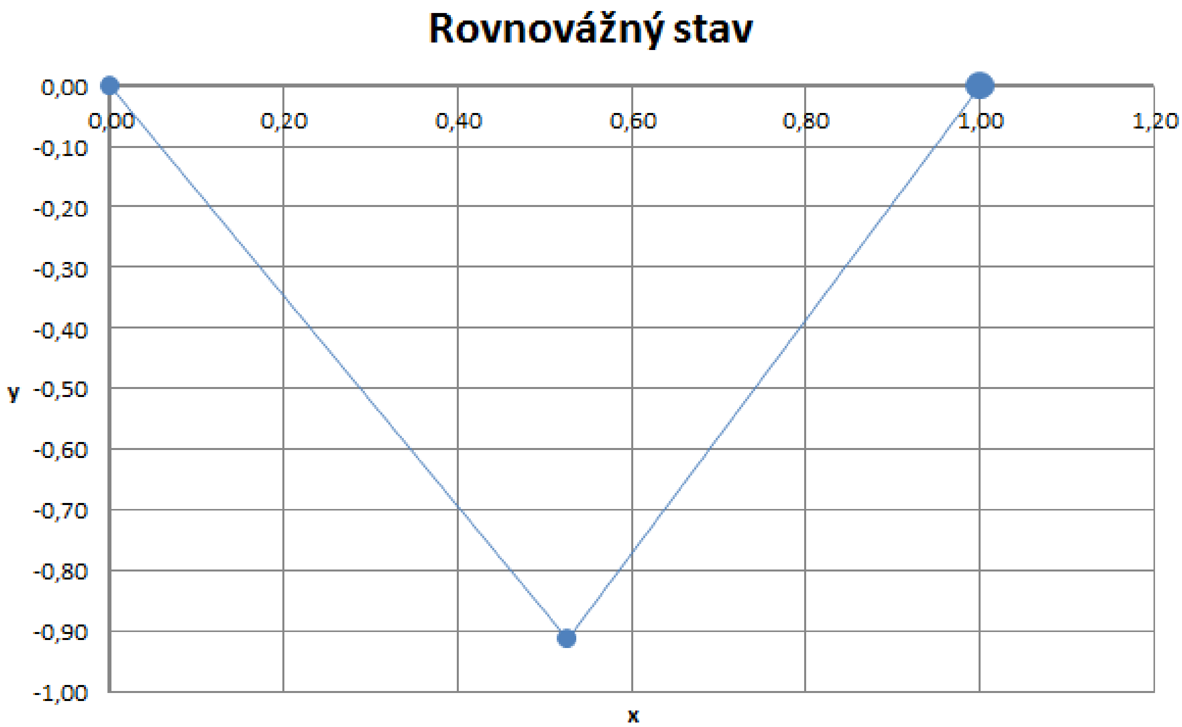
Po aktivaci tlačítka *Řešit* ve formuláři dostaneme např. následující výsledek:



Řešitel nalezl požadované řešení a po aktivaci tlačítka *OK* se formulář ukončí. V měněných buňkách listu zůstane poslední zkoumaná hodnota souřadnic, která odpovídá nalezenému optimu:

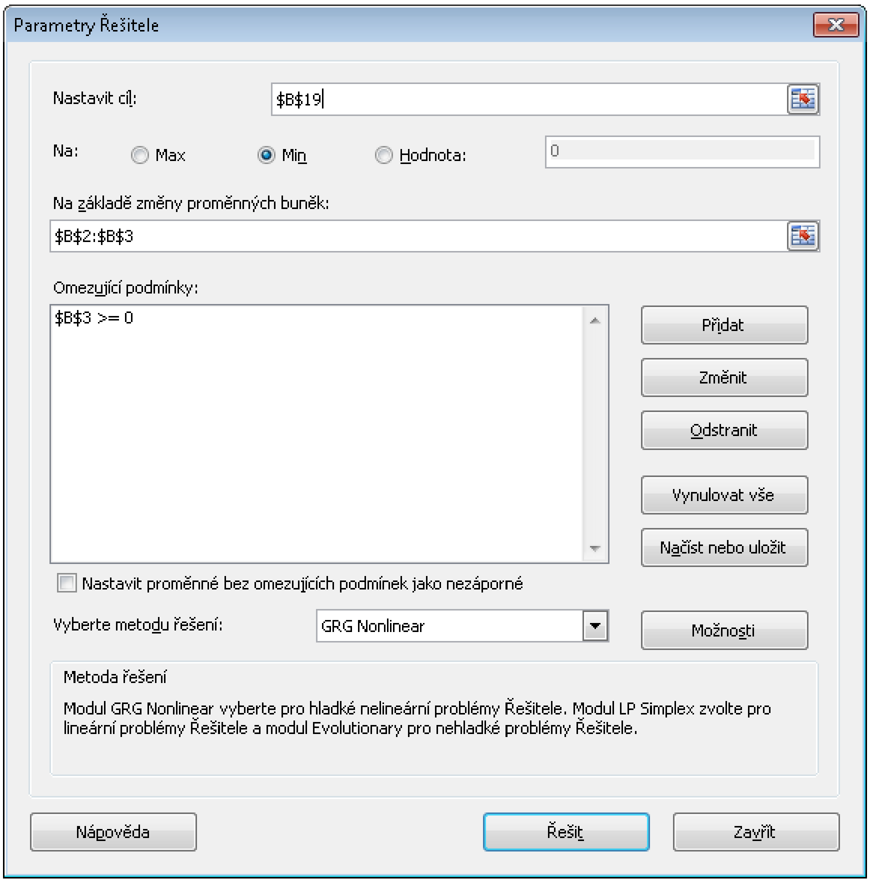
	A	B	C	D
1	**Veličina**	**Hodnota**	**Jednotky**	**Popis**
2	**x**	**0,525657004**	m	Variace souřadnic hmotného bodu bude
3	**y**	**-0,913209329**	m	vstupem pro optimalizaci
4	**Pružina 1**			
5	l_0	1	m	Délka nezatížené pružiny 1
6	k	100	N/m	Tuhost pružiny 1
7	l	1,053691874	m	$\sqrt{(x^2+y^2)}$ Skutečná délka pružiny 1
8	**Pružina 2**			
9	l_0	1	m	Délka nezatížené pružiny 2
10	k	200	N/m	Tuhost pružiny 2
11	l	1,029054205	m	$\sqrt{((l-x)^2+y^2)}$ Skutečná délka pružiny 2
12	**Další parametry**			
13	M	1	kg	Hmotnost závaží
14	L	1	m	Vzdálenost mezi závěsem pružin
15	**Energie**			
16	E_1	0,144140865	J	$0{,}5.k.(l-l_0)^2$ Elastická energie pružiny 1
17	E_2	0,084414681	J	$0{,}5.k.(l-l_0)^2$ Elastická energie pružiny 2
18	E_p	-8,958583517	J	m.g.y Potenciální energie závaží
19	**E**	**-8,730027971**	J	$E_1+E_2+E_p$. Hledáme min. celkové energie
20				

Při změně parametrů soustavy opět musíme spustit *Řešitele*, abychom našli nové optimum. Pro větší názornost získaného řešení vytvoříme graf, který ilustruje získané řešení. Bodový graf bude obsahovat pouze tři body *(0,0)*, *(x,y)* a *(0,L)* spojené lomenou čarou:

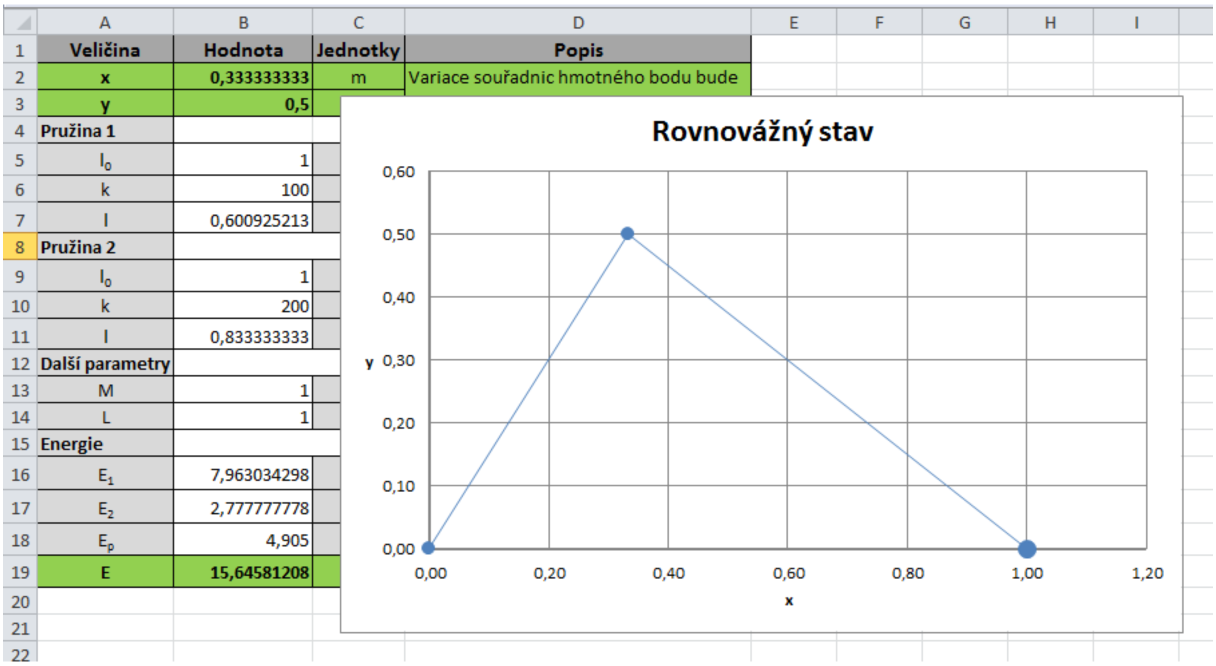


Uvedená úloha nemusí mít pouze jedno řešení. Při našich zvolených parametrech existuje ještě jedna možnost rovnováhy, kdy se obě pružiny stlačují a hledaný bod *A* je *nad* osou *x* (tzv. vzpěradlo). Pro nalezení tohoto řešení bychom měli provést dvě úpravy:

1. Výchozí bod *A* umístit do oblasti nad osu *x*, např. do buněk *B2* a *B3* vložit hodnotu *0,5*. Tento krok není nezbytný, pomůže však *Řešiteli* k rychlejšímu nalezení řešení.
2. Do formuláře *Řešitele* vložit omezující podmínku řešení, která ho přinutí vyhledat minimum energie v požadované oblasti. Nastavení podmínky provádíme pomocí tlačítka *Přidat* v poli *Omezující podmínky*. Omezujících podmínek můžeme vložit více, neměly by však potlačit existenci řešení (tzv. přeurčená úloha).



Výsledek řešení se projeví v datech listu i grafu:



Veličina	Hodnota	Jednotky	Popis
x	0,333333333	m	Variace souřadnic hmotného bodu bude
y	0,5		
Pružina 1			
l_0	1		
k	100		
l	0,600925213		
Pružina 2			
l_0	1		
k	200		
l	0,833333333		
Další parametry			
M	1		
L	1		
Energie			
E_1	7,963034298		
E_2	2,777777778		
E_p	4,905		
E	15,64581208		

Vidíme, že v prvním případě se pružiny prodloužily (tužší pružina se prodloužila méně), v druhém řešení se naopak smrštily (opět tužší pružina méně).

U nelineárních úloh často dostáváme více řešení, některá jsou stabilnější, jiná méně stabilní, tj. *Řešitel* z výchozího bodu (byť blízko méně stabilnímu řešení) „sklouzne“ ke stabilnějšímu řešení. Tento jev si můžeme ověřit v případě, že hmotnost závaží nastavíme na vysokou hodnotu.