2. Numerické výpočty

Excel je poměrně pohodlný nástroj na provádění různých numerických výpočtů. V příkladu si ukážeme možnosti výpočtu a zobrazení diferenciálních charakteristik analytické funkce, přičemž využijeme příklad 1 zobrazující pohodlně průběh funkce.

1. Numerická derivace funkce

Průběh nové funkce, která je derivací původní zobrazené funkce, opět zobrazím pomocí množiny bodů, přičemž vyjdeme z jednoduché aproximace pro derivaci *f'(x)*:

$$f'(x_i) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

Průběh derivace přidáme do grafu příkladu 1 „Průběh funkce“, před tím ho uložíme pod názvem „Priklad2.xlsm“. Do listu s daty podle výše uvedené aproximace přidáme sloupce s hodnotami diferencí a průběhem derivace, naplníme první buňky patřičnými vzorci a pomocí úchytu vzorce zkopírujeme pro celou oblast nezávisle proměnné:

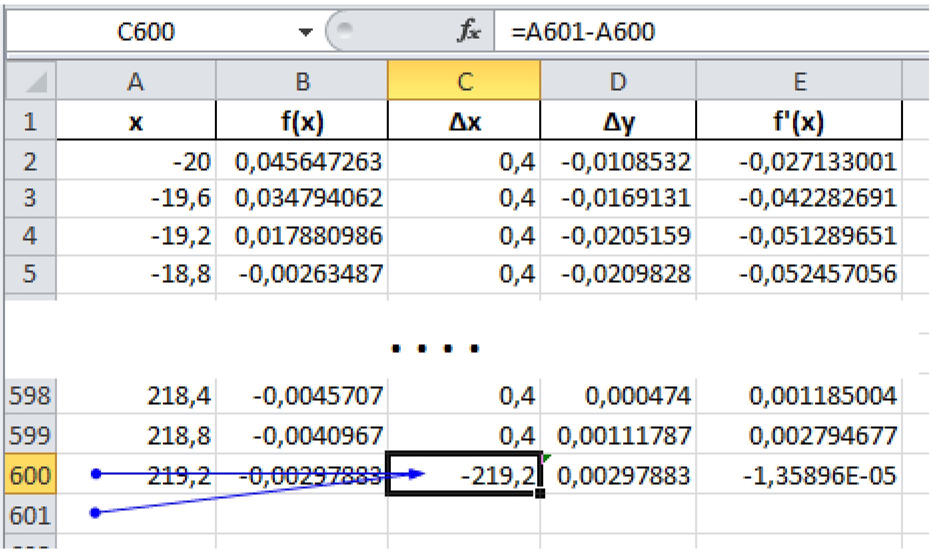
Obrázek 2-1

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	Δx	Δy	f'(x)
2	-20	0,045647263	=A3-A2	=B3-B2	=D2/C2
3	-19,6	0,034794062			
4	-19,2	0,017880986			
5	-18,8	-0,00263487			

Poznámka: Sloupce C a D bychom mohli samozřejmě vynechat a počítat derivaci ve sloupci E přímo vzorcem =(B3-B2)/(A3-A2). V dalších výpočtech však diference ještě využijeme.

Poslední řádek v nových sloupcích nebude samozřejmě správný: používá totiž data na řádku, který již obsahuje prázdné buňky:

Obrázek 2-2



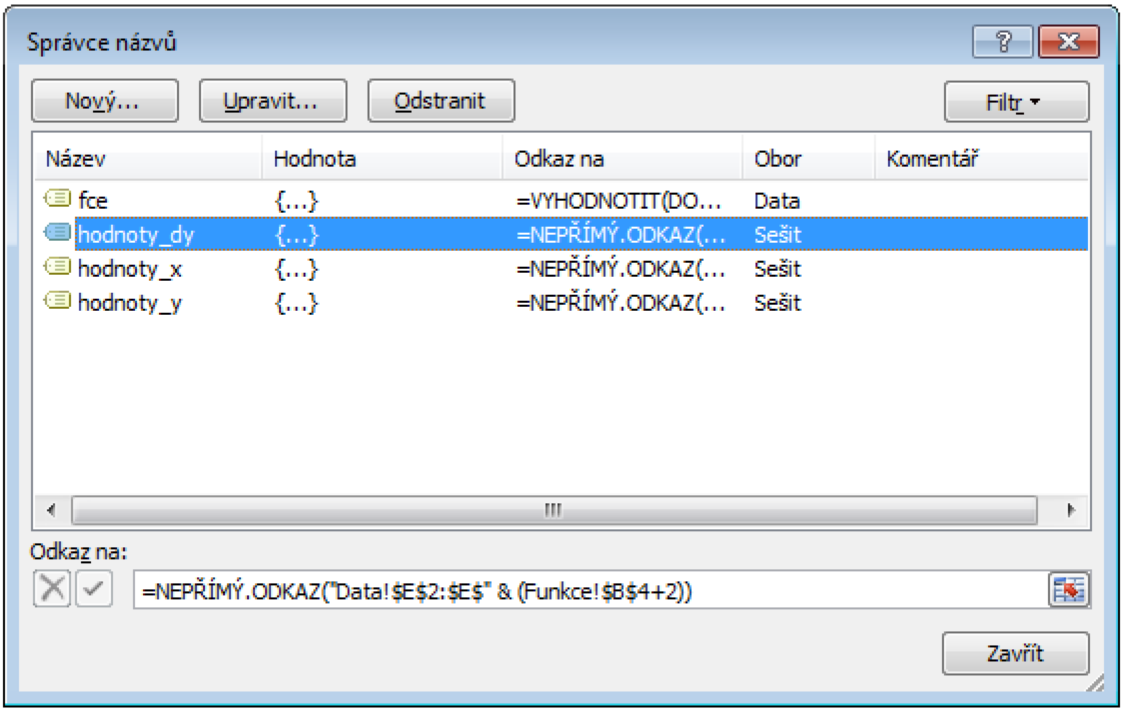
C600 | f_x | =A601-A600

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	Δx	Δy	f'(x)
2	-20	0,045647263	0,4	-0,0108532	-0,027133001
3	-19,6	0,034794062	0,4	-0,0169131	-0,042282691
4	-19,2	0,017880986	0,4	-0,0205159	-0,051289651
5	-18,8	-0,00263487	0,4	-0,0209828	-0,052457056
....					
598	218,4	-0,0045707	0,4	0,000474	0,001185004
599	218,8	-0,0040967	0,4	0,00111787	0,002794677
600	219,2	-0,00297883	-219,2	0,00297883	-1,35896E-05
601					

Při vložení dat do grafu bychom měli s touto okolností počítat, víme však, že obvykle zobrazujeme mnohem méně dat, než je v listu připraveno.

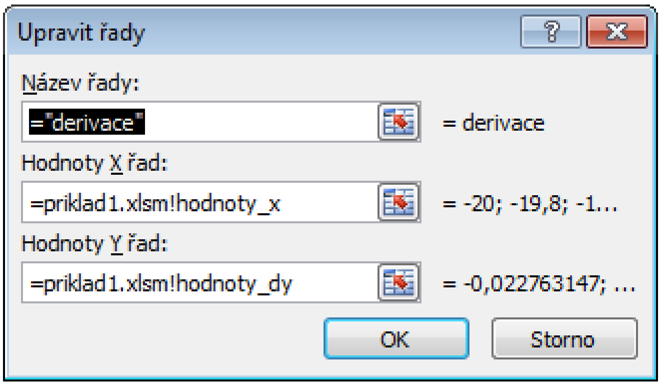
Z příkladu 1 již víme, že pro zobrazení v grafu potřebujeme dynamickou oblast, kterou definujeme v rámci názvů:

Obrázek 2-3



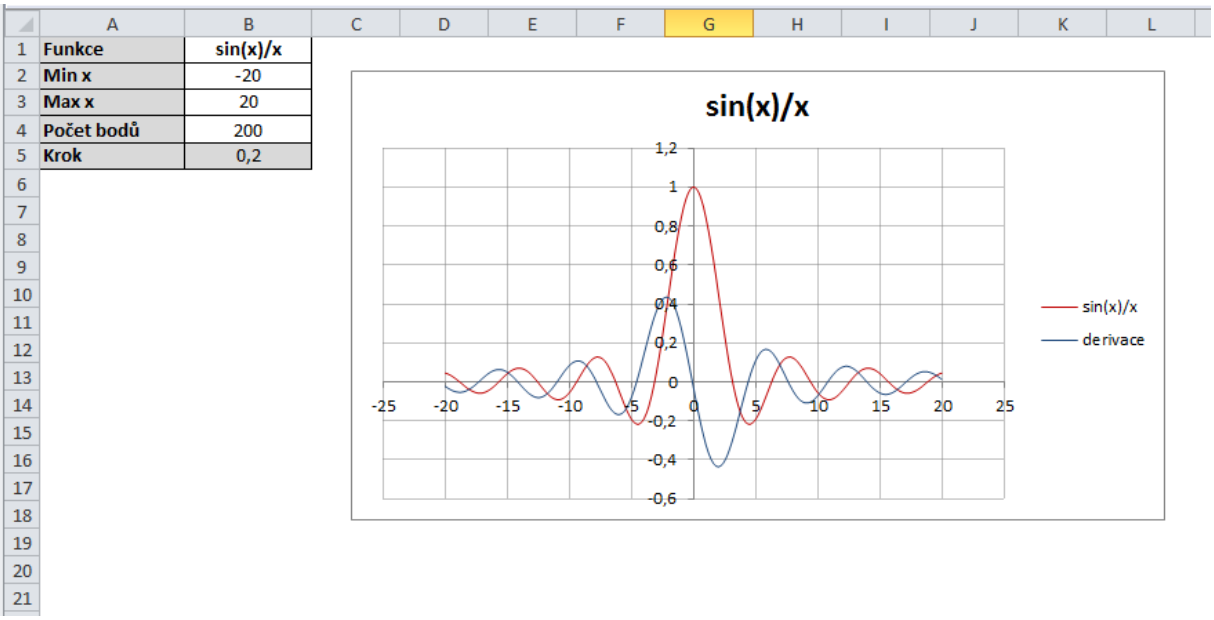
Do grafu s průběhem funkce nyní přidáme novou řadu, formulář s její definicí vyplníme takto:

Obrázek 2-4



Graf nyní bude obsahovat dvě křivky, proto zahrneme do grafu i vhodně umístěnou legendu:

Obrázek 2-5

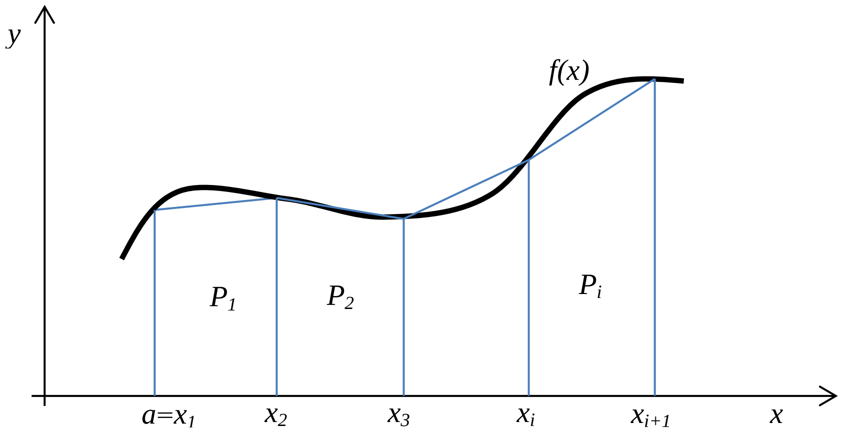


Poznámka: Pomocí průběhu derivace různých funkcí si připomeneme, že derivace charakterizuje změny v průběhu funkce. Tam, kde se průběh funkce mění nejrychleji, dosahuje derivace svá minima a maxima, naopak v místech lokálního maxima a minima funkce její derivace prochází nulou.

2. Numerický integrál funkce

Určitý integrál funkce jedné proměnné můžeme chápat jako plochu pod křivkou průběhu funkce mezi zadaným počátečním a koncovým bodem. Při numerickém výpočtu integrálu se stejně jako v případě derivace omezíme na pravidelnou množinu bodů nezávisle proměnné a plochu aproximujeme součtem

Obrázek 2-6



ploch lichoběžníků mezi jednotlivými body podle obrázku:

Pro plocha jednoho lichoběžníku zřejmě platí:

$$P_i = (x_{i+1} - x_i)\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} = \Delta x_i \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}$$

Určitý integrál tedy nahradíme součtem

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} P_i \ , \quad n = \frac{b-a}{\Delta x}$$

Nás však zajímá průběh neurčitého integrálu (tzv. primitivní funkce, jejíž derivací vznikne původní funkce *f(x)*), který můžeme definovat jako funkci horní meze určitého integrálu takto:

$$I(x) = \int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt$$

V naší aproximaci tedy bude

$$I(x_i) \approx \sum_{i=1}^{n} P_i \ , \quad kde\ n = \frac{x_i - a}{\Delta x_i}$$

Pro každou hodnotu x_i nezávisle proměnné vypočítáme odpovídající plošku lichoběžníku P_i, které budeme vkládat do sloupce F:

Obrázek 2-7

F2 | =C2*(B3+B2)/2

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	f(x)	Δx	Δy	f'(x)	P	
2	-10	0,222005257	0,06666667	0,03402767	0,510415084	0,015934606	
3	-9,93333333	0,256032929	0,06666667	0,01519618	0,227942714		
4	-9,86666667	0,27122911	0,06666667	-0,0031914	-0,047870555		
5	-9,8	0,268037739	0,06666667	-0,0203683	-0,305524138		
6	-9,73333333	0,247669464	0,06666667	-0,0356209	-0,534313621		
7	-9,66666667	0,212048556	0,06666667	-0,0483173	-0,724759435		

Vzorec pomocí dolního úchytu zkopírujeme přes celý sloupec pro všechny hodnoty nezávisle proměnné.

Hodnotou integrálu funkce *f(x)* pro hodnotu x_i je pak součet ploch všech předcházejících lichoběžníků, tj. mohli bychom do buňky G2 použít vzorec =suma(F2:F2), který bychom zkopírovali v rámci sloupce. Taková konstrukce je však velmi neefektivní: při každém přepočtu listu se budou počítat znovu součty všech předcházejících buněk. Přitom je zřejmé, že každé dvě následující buňky v integrálu se liší právě o plochu lichoběžníku mezi nimi. Proto je výhodnější použít pro výpočet integrálu vzorec:

Obrázek 2-8

G3 f_x =F3+G2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	f(x)	Δx	Δy	f'(x)	P	I(x)	
2	-10	0,222005257	0,06666667	0,03402767	0,510415084	0,015934606	0,015934606	
3	-9,93333333	0,256032929	0,06666667	0,01519618	0,227942714	0,017575401	0,033510007	
4	-9,86666667	0,27122911	0,06666667	-0,0031914	-0,047870555	0,017975562		
5	-9,8	0,268037739	0,06666667	-0,0203683	-0,305524138	0,01719024		
6	-9,73333333	0,247669464	0,06666667	-0,0356209	-0,534313621	0,015323934		
7	-9,66666667	0,212048556	0,06666667	-0,0483173	-0,724759435	0,012525994		

K ploše odpovídajícího lichoběžníku tedy přičítáme obsah předcházející buňky ve sloupci. Začínáme až od druhého řádku, neboť v prvním řádku pochopitelně žádná předcházející buňka není, proto zde pouze zkopírujeme plochu prvního lichoběžníku.

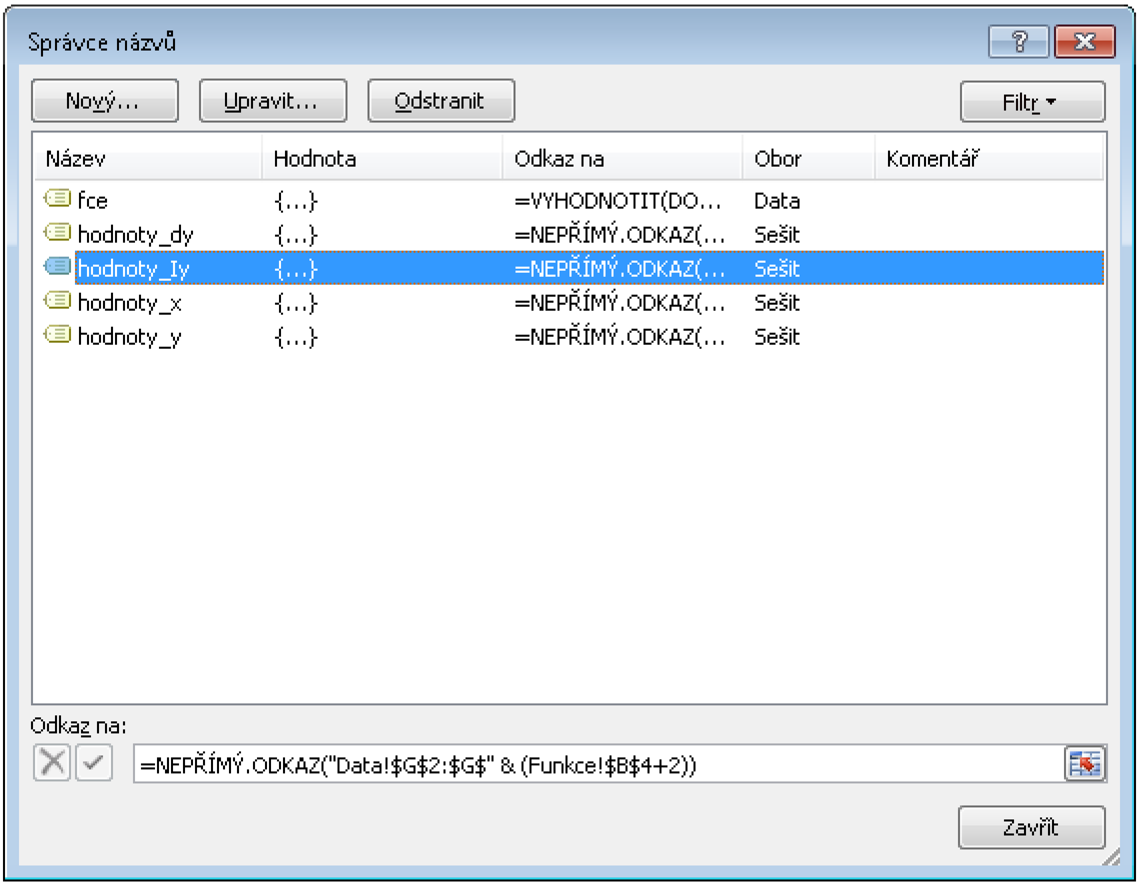
Schéma výpočtu je tedy následující:

Obrázek 2-9

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	f(x)	Δx	Δy	f'(x)	P	I(x)	
2	-10	0,22200526	0,0666667	0,0340277	0,510415084	0,015934606	0,015934606	
3	-9,9333333	0,25603293	0,0666667	0,0151962	0,227942714	0,017575401	0,033510007	
4	-9,8666667	0,27122911	0,0666667	-0,0031914	-0,047870555	0,017975562	0,051485569	
5	-9,8	0,26803774	0,0666667	-0,0203683	-0,305524138	0,01719024	0,068675809	
6	-9,7333333	0,24766946	0,0666667	-0,0356209	-0,534313621	0,015323934	0,083999743	

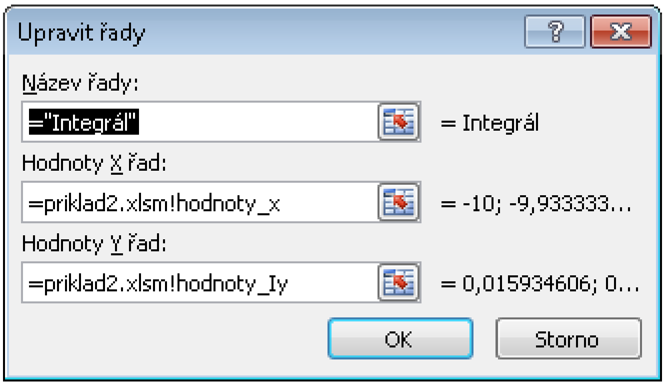
Nyní již zbývá pouze přidat další oblast do pojmenovaných názvů:

Obrázek 2-10



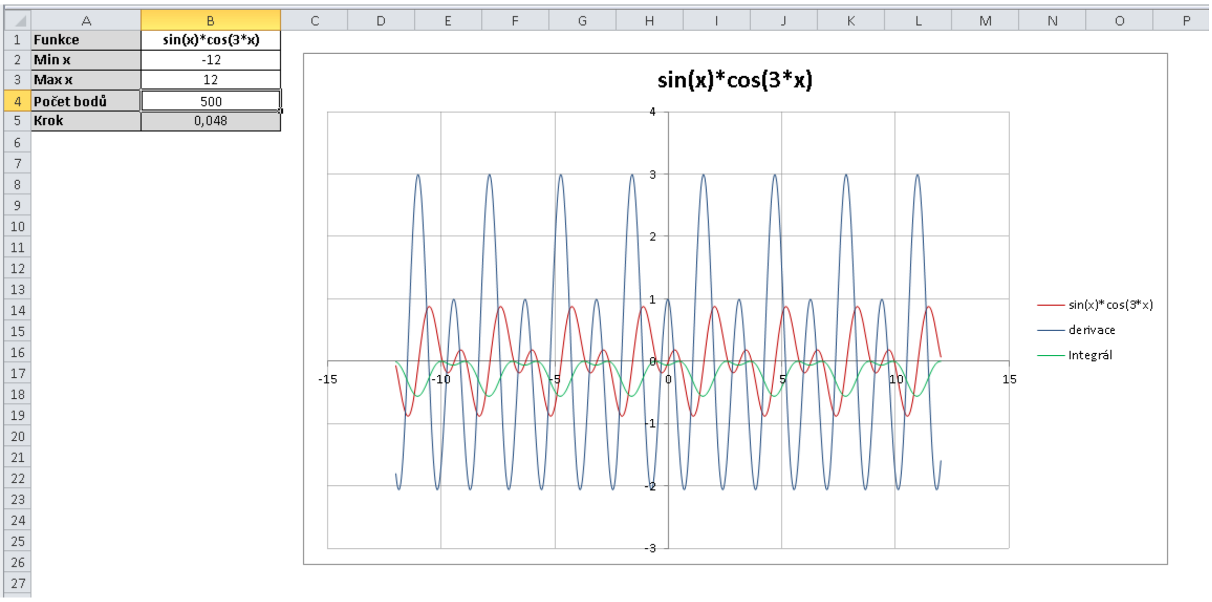
V grafu přidáme další dynamickou řadu již známým postupem:

Obrázek 2-11



Výsledný graf bude vypadat např. takto:

Obrázek 2-12



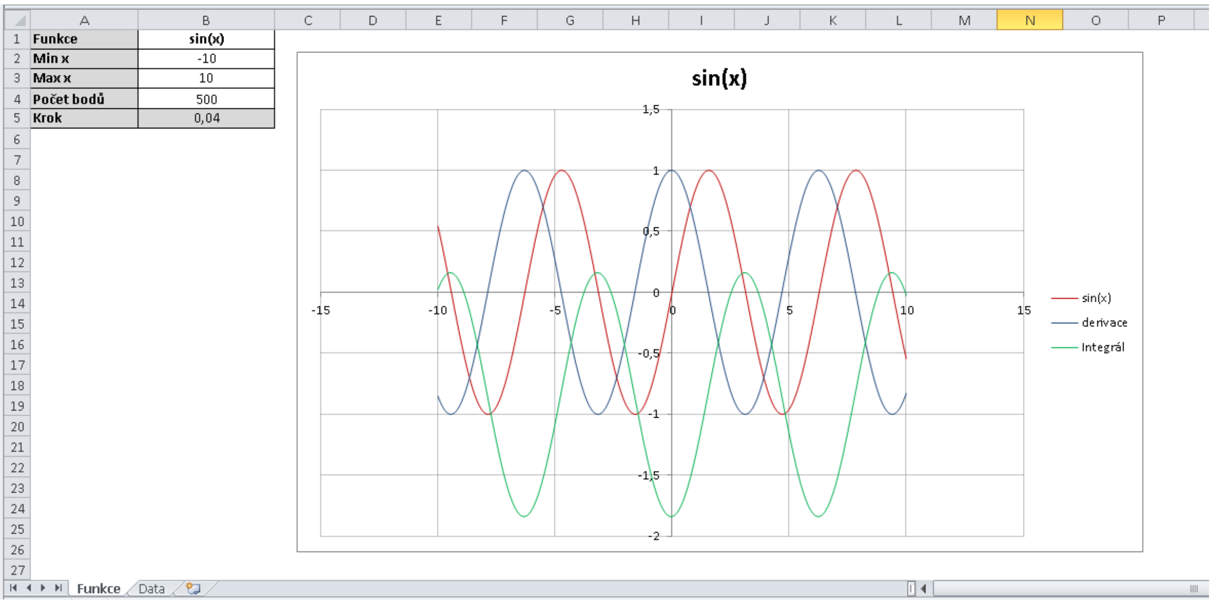
Z grafu je např. ihned patrné, že u periodické funkce obecně derivace zvýrazňuje amplitudu a integrál ji naopak vyhlazuje, což se často používá např. ve sdělovací- a audiotechnice. Ve zvolené funkci jsou všechny průběhy škálovány na stejnou vertikální osu, v případě našeho integrálu však může být takové zobrazení nevýhodné:

Na Obrázek 2-13 vidíme, že integrál funkce *sin(x)* (tj. funkce -*cos(x)*) se pohybuje pro naše parametry v intervalu cca <-1,8; 0,2>, což neodpovídá očekávanému chování goniometrické funkce. Je to dáno tím, že naše metoda výpočtu neurčitého integrálu obecně závisí na dolní mezi počítaného intervalu. Každá následující hodnota ve sloupci hodnot integrálu totiž závisí na předcházející a volba nulové počáteční hodnoty řady pro dolní mez *I(a)* tedy ignoruje plochu pod křivkou funkce *před* touto mezí. Velikost této zanedbané plochy představuje neurčitou konstantu. Vzpomeňme si, že vzorec pro výpočet primitivní funkce se zapisuje obvykle takto:

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

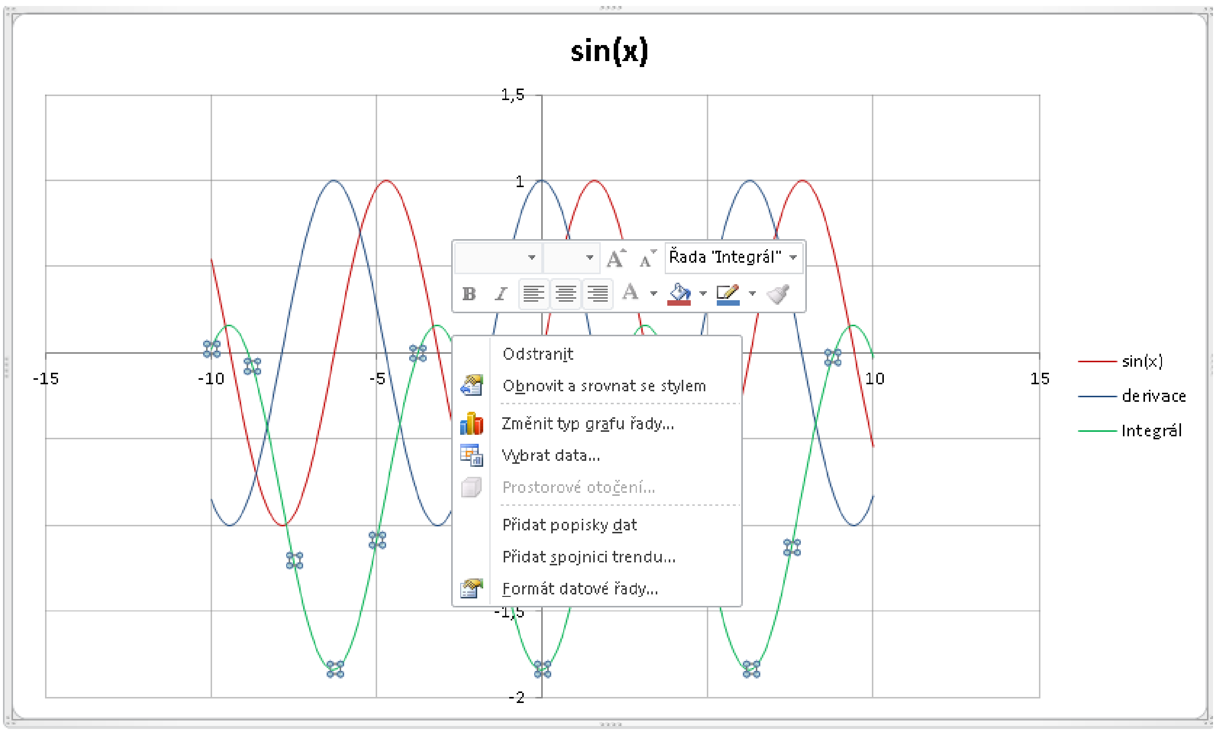
Ve skutečnosti představuje integrační konstanta C právě neučitost toho, že zahájení sečítání ploch pod křivkou funkce je libovolné

Obrázek 2-13



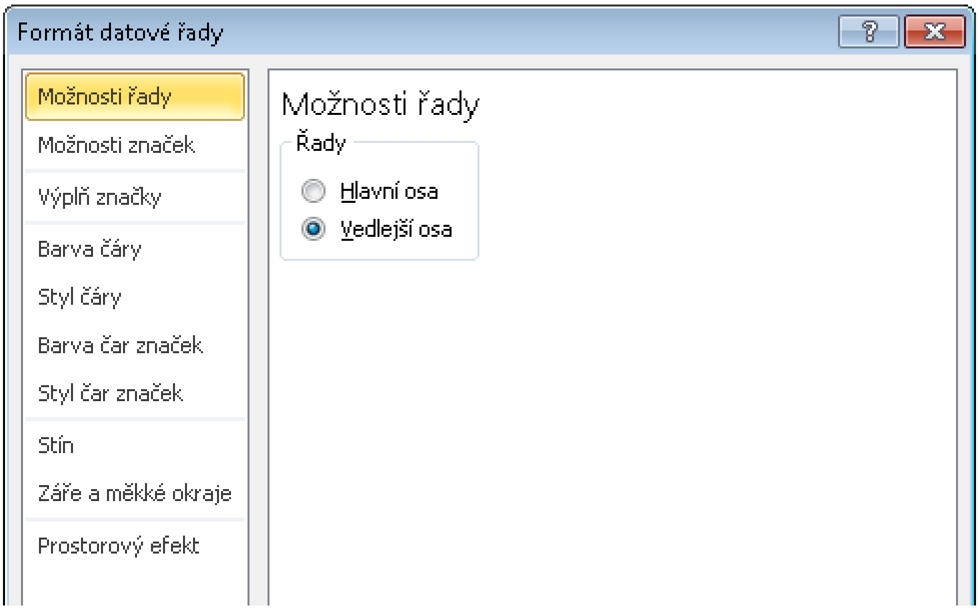
Křivka integrálu je tedy obecně posunuta v grafu o neznámou hodnotu ve směru osy y. Proto použijeme pro průběh integrálu raději vedlejší osu s vlastními jednotkami. Vybereme křivku v grafu odpovídající integrálu a pomocí pravého tlačítka myši aktivujeme položku „Formát datové řady“:

Obrázek 2-14



V otevřeném formuláři pak vybereme pro tuto řadu použití vedlejší osy:

Obrázek 2-15



Nyní nám už posunutí integrálu funkce nedegraduje průběh ostatních křivek vlivem nevhodné škály:

Obrázek 2-16